

**VDI-Fachtagung**  
**Messunsicherheit praxisgerecht bestimmen**

13. und 14. November 2019 in Erfurt

**Messunsicherheit bei der**  
**Best-Einpassung von Lochbildern**

Dr.-Ing. Michael Hernla, Dortmund

# Inhalt

1. Einleitung
2. Position mit Bezugssystem
3. Position ohne Bezugssystem
4. Best-Einpassung von Lochbildern
5. Gauß
6. Differenzenmethode
7. Tschebyschew
8.  $L_1$ -Norm
9. Diskussion

# Einleitung und Fragestellung (1)

- Position von Bohrungen in Lochbildern häufige Messaufgabe in der industriellen Fertigung
- Ziel: Erfüllung der Funktion, d.h. Paarungs- oder Passfähigkeit mit dem Gegenstück
- Technische Zeichnung mit geometrischer Produktspezifikation:
  - a) Positionstoleranz **mit** Bezugssystem – eindeutige Messergebnisse für Korrektur
  - b) Kombinierte Toleranz **ohne** Bezugssystem – entspricht eher der Funktion

## Einleitung und Fragestellung (2)

Methoden zur Best-Einpassung:

- Kleinste Summe der Abweichungsquadrate, Ausgleichsrechnung nach Gauß
- Kleinste maximale Abweichung, Minimum- oder Minimax-Bedingung nach Tschebyschew
- Kleinste Summe der Abweichungsbeträge,  $L_1$ -Norm oder minimales Volumen

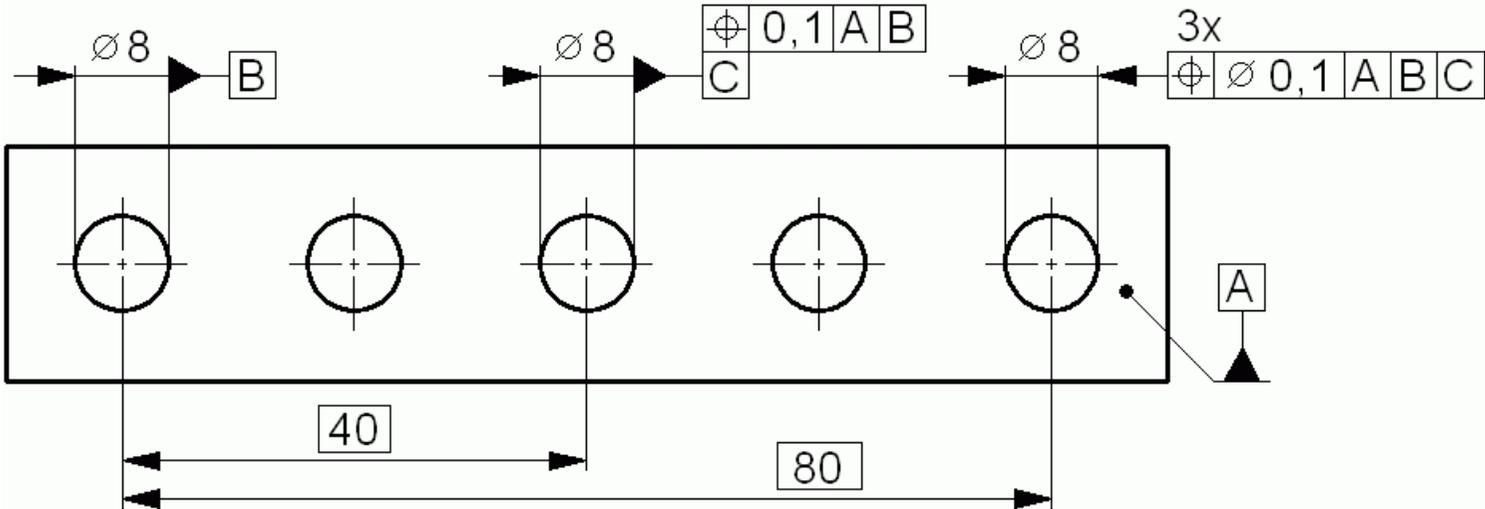
## Einleitung und Fragestellung (3)

Methoden zur Unsicherheits-Ermittlung:

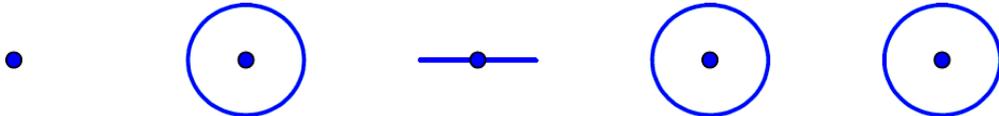
- Analytischer Ansatz
- Differenzenmethode nach DIN 1319 Teil 3  
Anhang B
- Numerische Simulation (Monte-Carlo-Methode)  
nach GUM Supplement 1

# Positionstoleranzen mit Bezugssystem

Zeichnungseintragung nach ISO 1101:

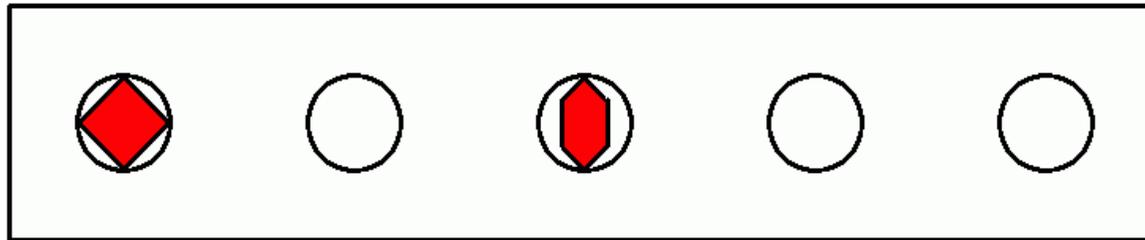


Toleranzfelder:

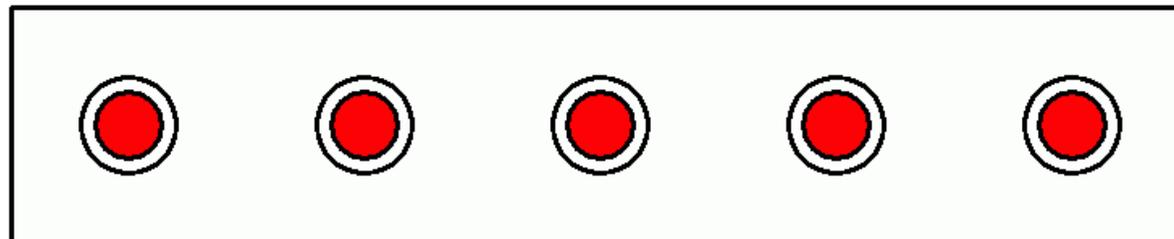


# Funktion

Gestaltung des Gegenstücks für spielfreie Aufnahme:

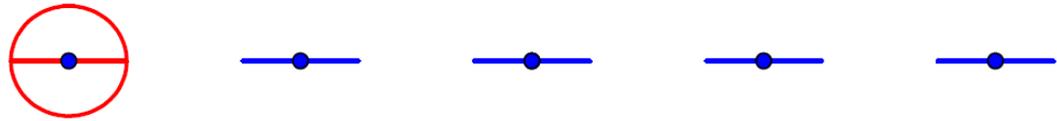


Häufigste Anwendung mit Spiel zum Gegenstück:

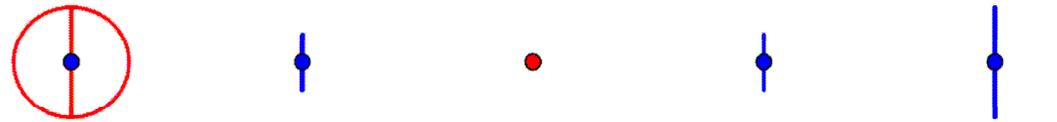


# Wirkung des Spiels in den Bezügen

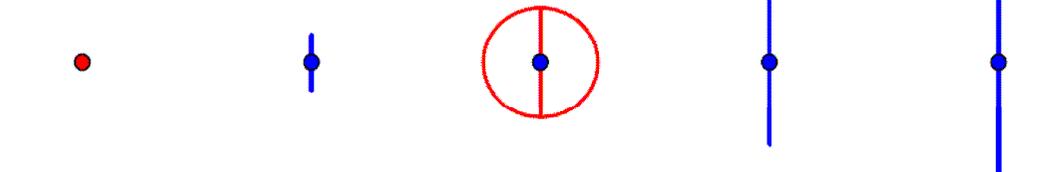
Horizontale Verschiebung  
mit Spiel im Bezug B:



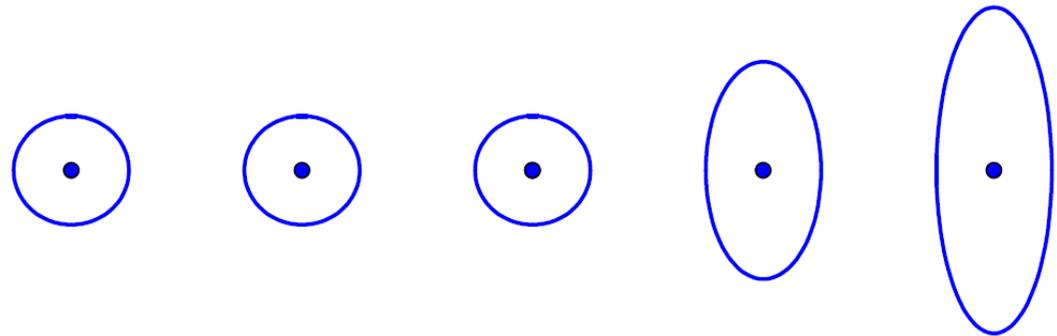
Drehung mit Spiel im  
Bezug B um Bezug C:



Drehung mit Spiel im  
Bezug C um Bezug B:

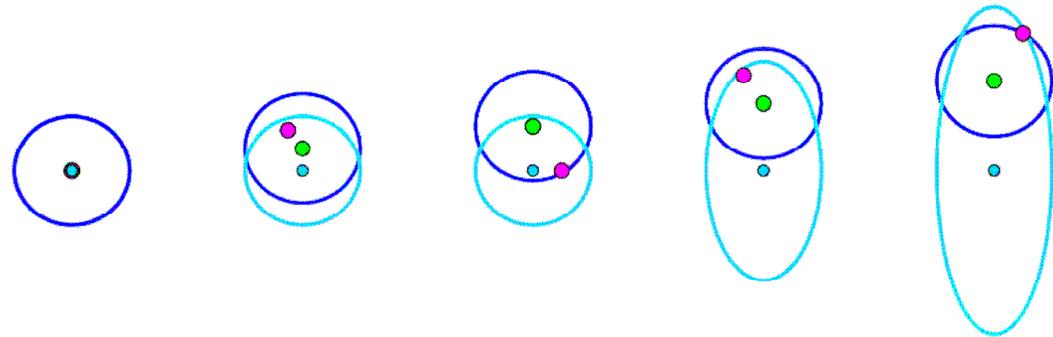


Resultierende  
Toleranzzonen:

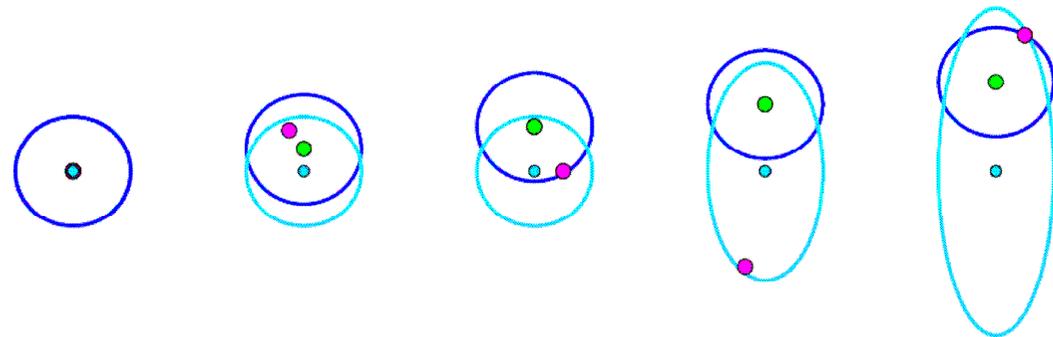


# Toleranzzonen mit Abweichungen

Resultierende Toleranz-  
zonen mit Abweichungen  
auf derselben Seite –  
passt



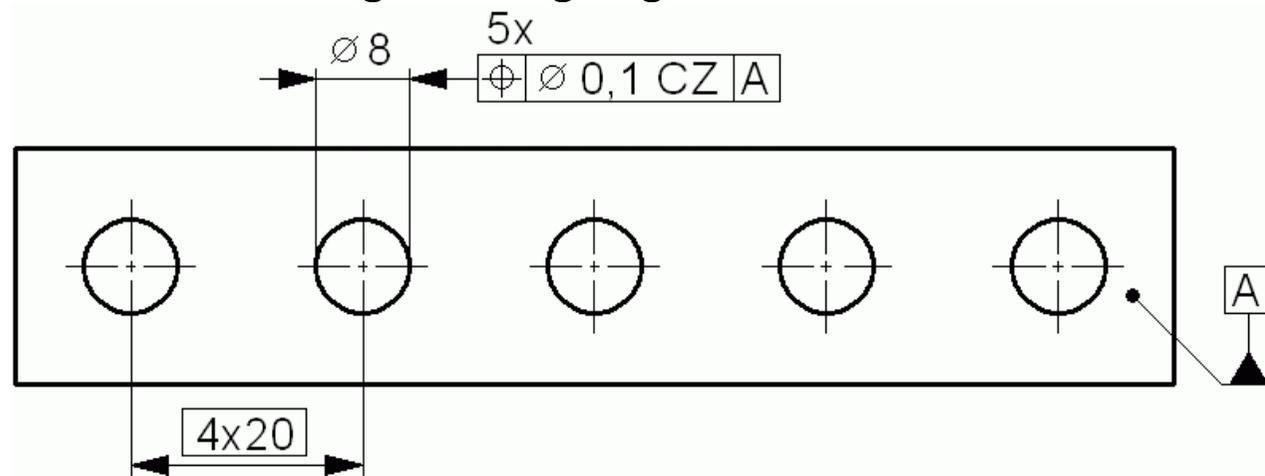
Resultierende Toleranz-  
zonen mit einer Abweichung  
auf der anderen Seite –  
passt nicht



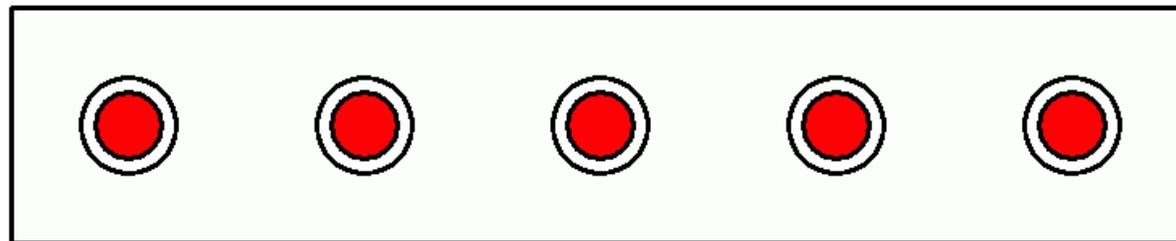
→ Alle Bohrungen müssen gleichberechtigt passen!

# Kombinierte Toleranz ohne Bezugssystem

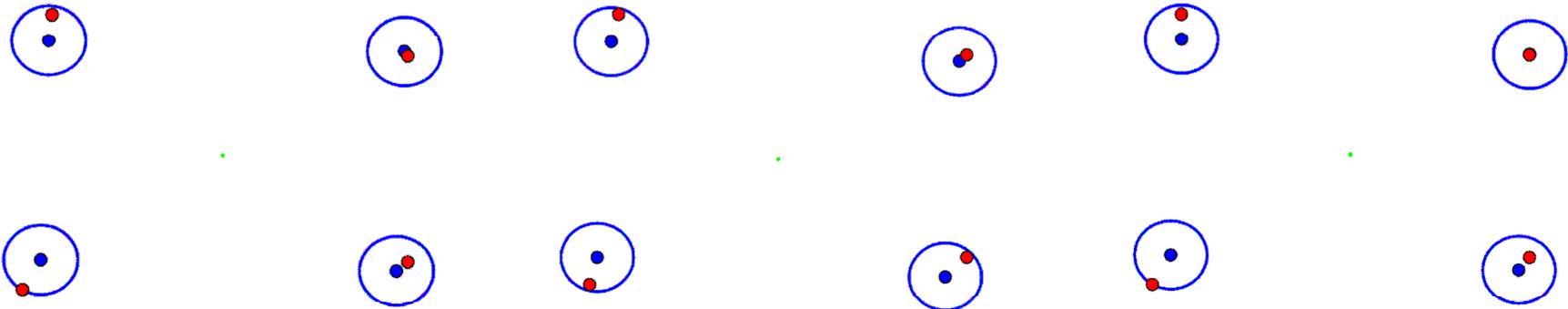
Zeichnungseintragung nach ISO 5458:



Alle Bohrungen mit gleichem Spiel zum Gegenstück:



# Best-Einpassung von Lochbildern



Gauß (Kleinste  
Quadratsumme)  
Max. Abw.: 0,99

Tschebyschew (Kleinste  
maximale Abweichung)  
Max. Abw.: 0,83

$L_1$ -Norm (Kleinste  
Summe der Beträge)  
Max. Abw.: 1,01

- Gauß-Methode einfach und mit kleinster Messunsicherheit
- Minimax-Methode (kleinste Abweichung) entspricht Funktion

# Welches Einpass-Kriterium?

Keine GPS-Standardspezifikation festgelegt

- [ISO 5458:2018](#) Elementgruppen und kombinierte geometrische Spezifikation – keine Festlegung
- [ISO 1101:2017](#) Form und Lagetoleranzen – Minimax-Bedingung für Form ... kann auch für andere geometrische Eigenschaften verwendet werden
- **Aber:** Bezieht sich nur auf einzelne geometrische Elemente, nicht auf Elementgruppen
- Keine Symbole und Regeln zur Zeichnungseintragung – Normen und Zeichnungen nicht eindeutig

## Einpassung nach Gauß

- Verschiebung des Schwerpunktes der Ist-Positionen (P) zu den Nennlagen (N) aller  $i$  Bohrungsmittelpunkte (Anzahl  $n$ ) um die Koordinatendifferenzen  $\Delta X$  und  $\Delta Y$ :

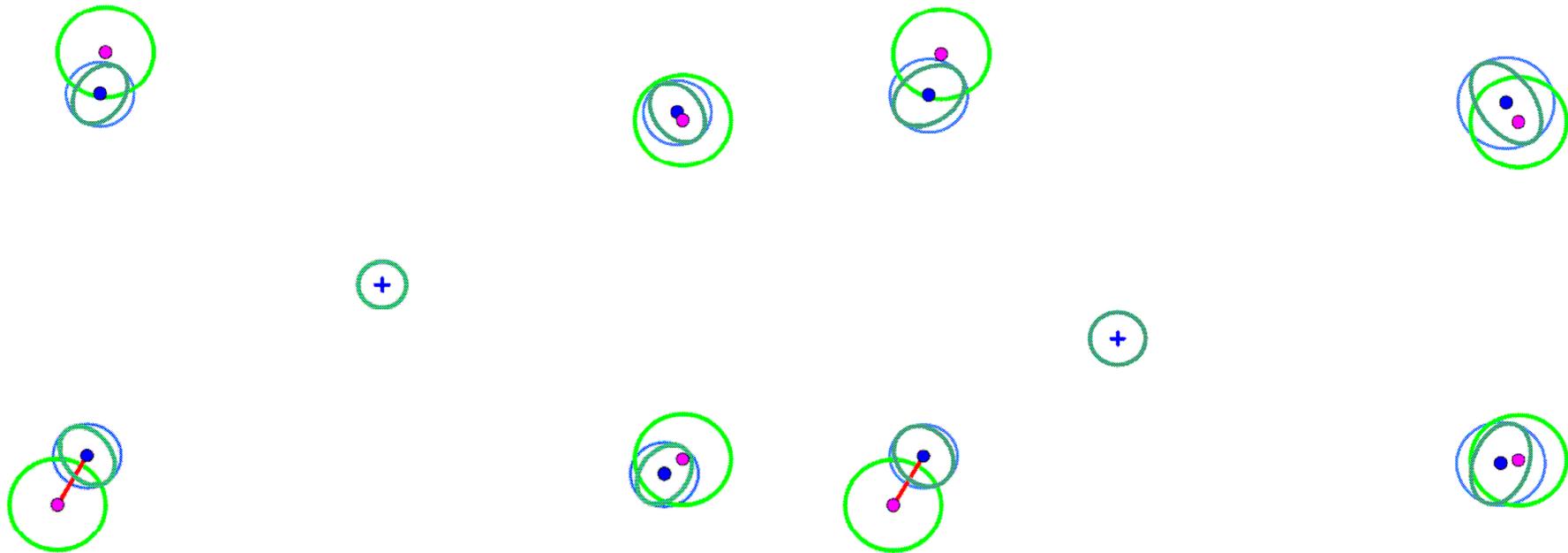
$$\Delta x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{Pi} - x_{Ni} \quad \Delta y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{Pi} - y_{Ni}$$

- Drehung des Lochmusters um den Schwerpunkt mit Winkeldifferenz  $\Delta W$ :

$$\Delta W = \frac{\sum_{i=1}^n (w_{Pi} - w_{Ni}) * r_i}{\sum_{i=1}^n r_i^2}$$

Radiale Abstände  $r_i$  der Bohrungsmitten vom Schwerpunkt

# Beispiel Gauß



a) Einpassung mit vier Bohrungen

b) Einpassung mit drei Bohrungen

Streubereiche: **Bohrungsmittelpunkte**,  
Lochbildeinpassung, **maximale Unsicherheiten**

# Unsicherheit der Einpassung nach Gauß

- Mittelpunktkoordinaten der Bohrungen unabhängig und mit gleich großen Standardunsicherheiten ( $u_{Xi}=u_{Yi}=u_{Mi}$ )

- Unsicherheit im Schwerpunkt:

$$u_{\Delta XS} = u_{\Delta YS} = u_{MS} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n u_{Mi}^2}$$

- Unsicherheit Drehwinkel:

$$u_{\Delta W} = \frac{u_{MS}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2}}$$

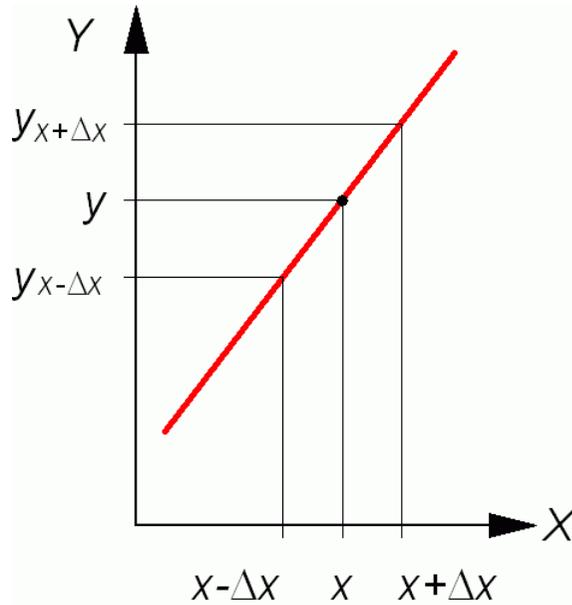
- Größte Unsicherheiten wie große Halbachsen der Streuungsellipsen:

$$u_{\max} = u_{MS} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2} \quad \text{mit } \bar{r} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n r_i$$

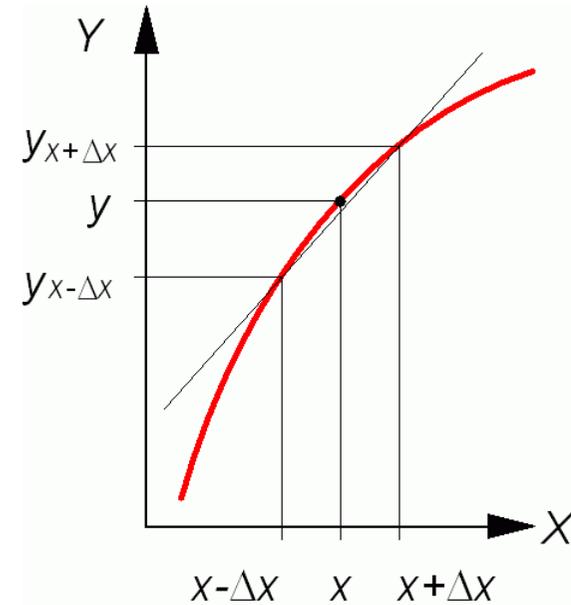
- Je mehr Bohrungen, desto kleinere Unsicherheiten

# DIN 1319 Teil 3 Anhang B – Differenzenmethode

Für jede Eingangsgröße  $X_i$ :



a) Lineare Funktion



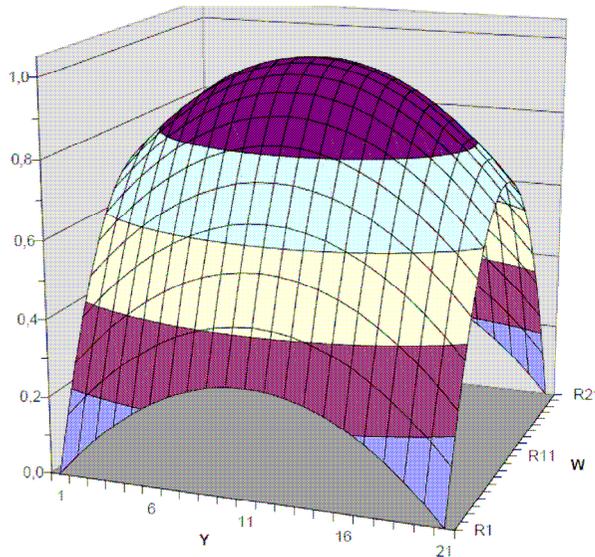
b) Nichtlineare Funktion

Mittelwert: 
$$\Delta y_i = \frac{y_{x_i + \Delta x_i} - y_{x_i - \Delta x_i}}{2}$$

Sensitivitätskoeffizient: 
$$c_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

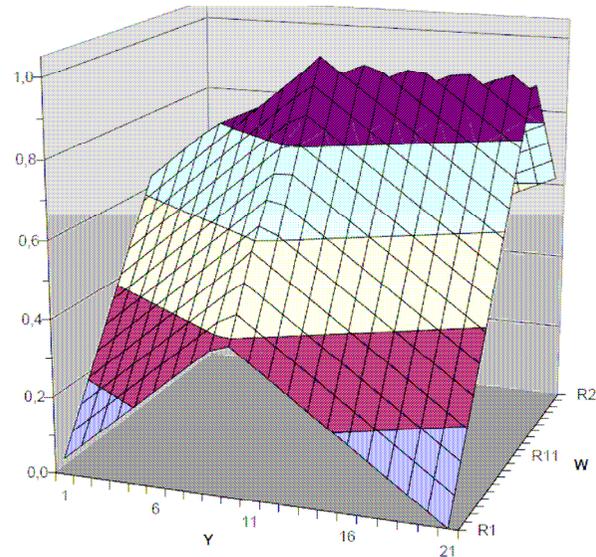
# Zielfunktionen der Einpassmethoden

Beispiel: Y-Koordinate und Winkel (inverse Darstellung)



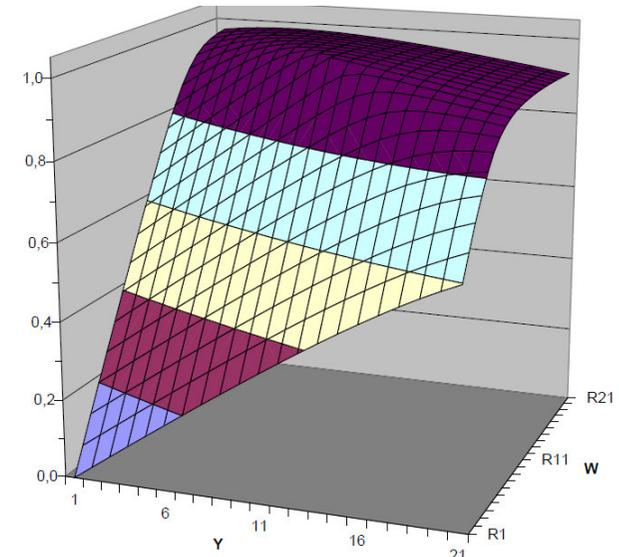
Gauß (Kleinste  
Quadratsumme)

Korr.-Koeff.:  $r_{YW} = 0,00$



Tschebyschew (Kleinste  
maximale Abweichung)

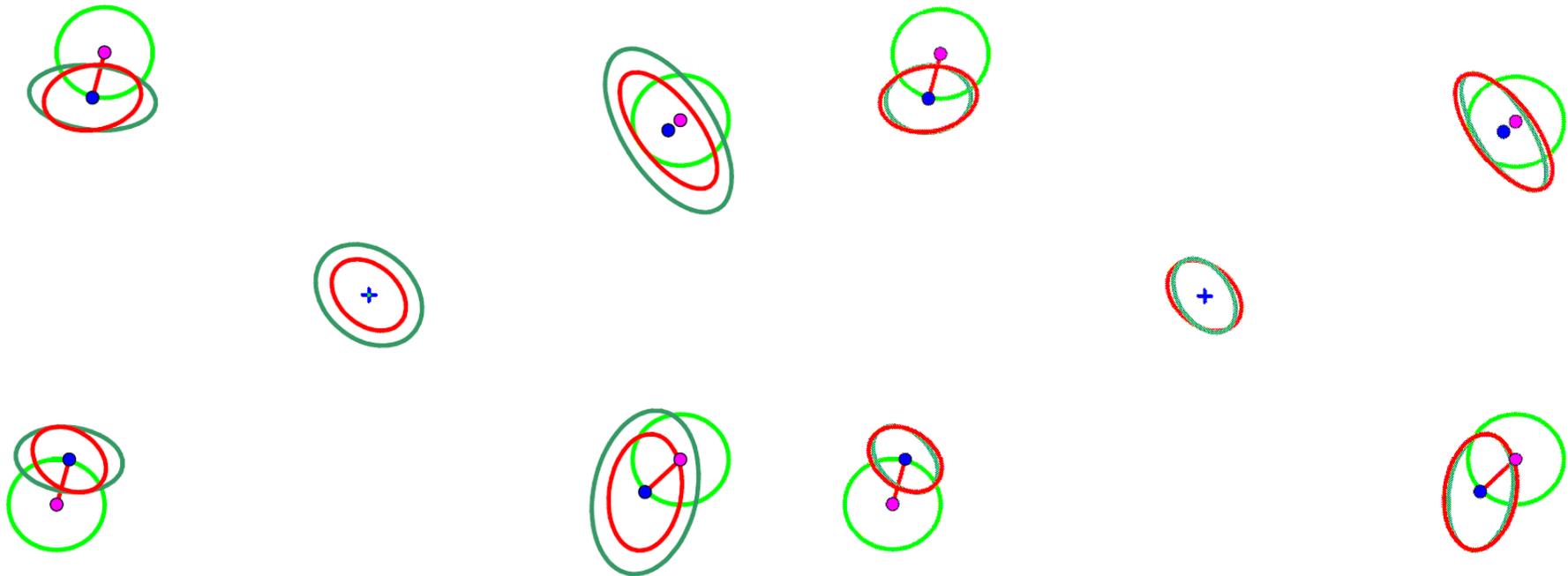
Korr.-Koeff.:  $r_{YW} = 0,24$



$L_1$ -Norm (Kleinste  
Summe der Beträge)

Korr.-Koeff.:  $r_{YW} = 0,47$

# Beispiel Tschebyschev mit Differenzenmethode (1)



a) Differenzbetrag  $\Delta x_i = 0,5 * u(x_i)$  –  
DIN 1319-4: Unsicherheiten zu groß

b) Differenzbetrag  $\Delta x_i = 3 * u(x_i)$  –  
Unsicherheiten wie Simulation

Streubereiche: Bohrungsmittelpunkte, Differenzenmethode, Simulation

## Beispiel Tschebyschew mit Differenzenmethode (2)

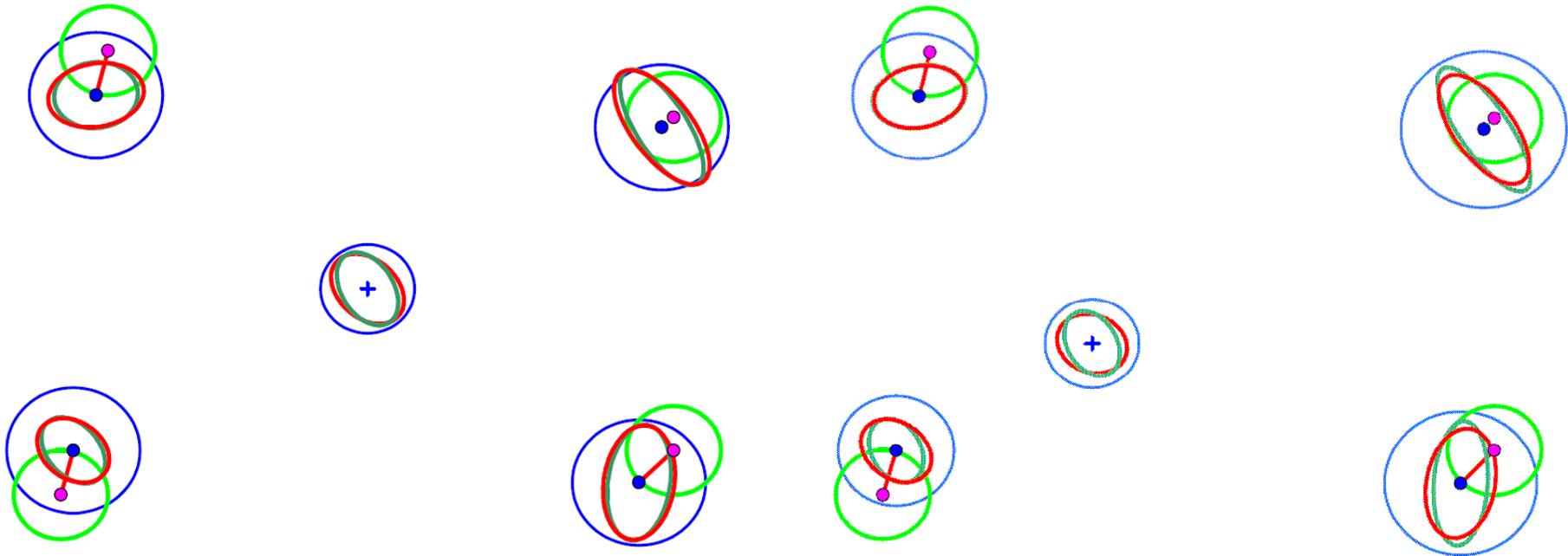
Schwerpunkt-Koordinate  $X$  mit Differenzbetrag  $\Delta x_i = 3 \cdot u(x_i)$

Eingangsgröße	Messwert	Stand.-uns.	Abweichung	Abweichung	Standardunsicherheit	Sensitivitätskoeffizient
$X_i$	$x_i$	$u_{X_i}$	$y_{x_i-\Delta x_i} - y_i$	$y_{x_i+\Delta x_i} - y_i$	$u_i(y)$	$c_i$
$X_{P1}$	20	0,01	-0,0049	0,0225	-0,0046	-0,46
$Y_{P1}$	60,3	0,01	0,0075	0,0016	0,0010	0,10
$X_{P2}$	80	0,01	0	0	0	0
$Y_{P2}$	60	0,01	0	0	0	0
$X_{P3}$	19,8	0,01	-0,0066	0,0201	-0,0045	-0,45
$Y_{P3}$	19,9	0,01	0,0062	0,0016	0,0008	0,08
$X_{P4}$	80	0,01	0,0074	0,0044	0,0005	0,05
$Y_{P4}$	20,1	0,01	0,0033	0,0031	0,0000	0,00
$u_{X_S} =$					0,0065	

# Einpassung nach Tschebyschew

- Differenzenmethode mit stark unsymmetrischen Abweichungen vom Messwert – z. T. auf derselben Seite
- Drei Parameter  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  und  $\Delta W$  erfordern mindestens drei Bohrungen – mit gleich großen Abweichungen
- Unsicherheiten **unabhängig** von der Bohrungsanzahl – immer drei für die Einpassung
- Schwerpunkt und Lochmuster mit ausgeprägten Streuungsellipsen
- Abhängig von Position der Bohrung und Richtung der Abweichung sowie vom radialen Abstand  $r$  der Bohrungsmitte vom Schwerpunkt

## Beispiel Tschebyschew (2)



a) Einpassung mit vier Bohrungen

b) Einpassung mit drei Bohrungen

Streubereiche: **Bohrungsmittelpunkte**,  
Differenzenmethode, **Simulation**, **maximale Unsicherheiten**

# Unsicherheit der Einpassung nach Tschebyschew

- Mittelpunktkoordinaten der Bohrungen unabhängig und mit gleich großen Standardunsicherheiten ( $u_{Xi}=u_{Yi}=u_{Mi}$ )

- Unsicherheit im Schwerpunkt:

$$u_{MS} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_{Mi}^2} \quad \text{für } n = 3 \text{ Bohrungen}$$

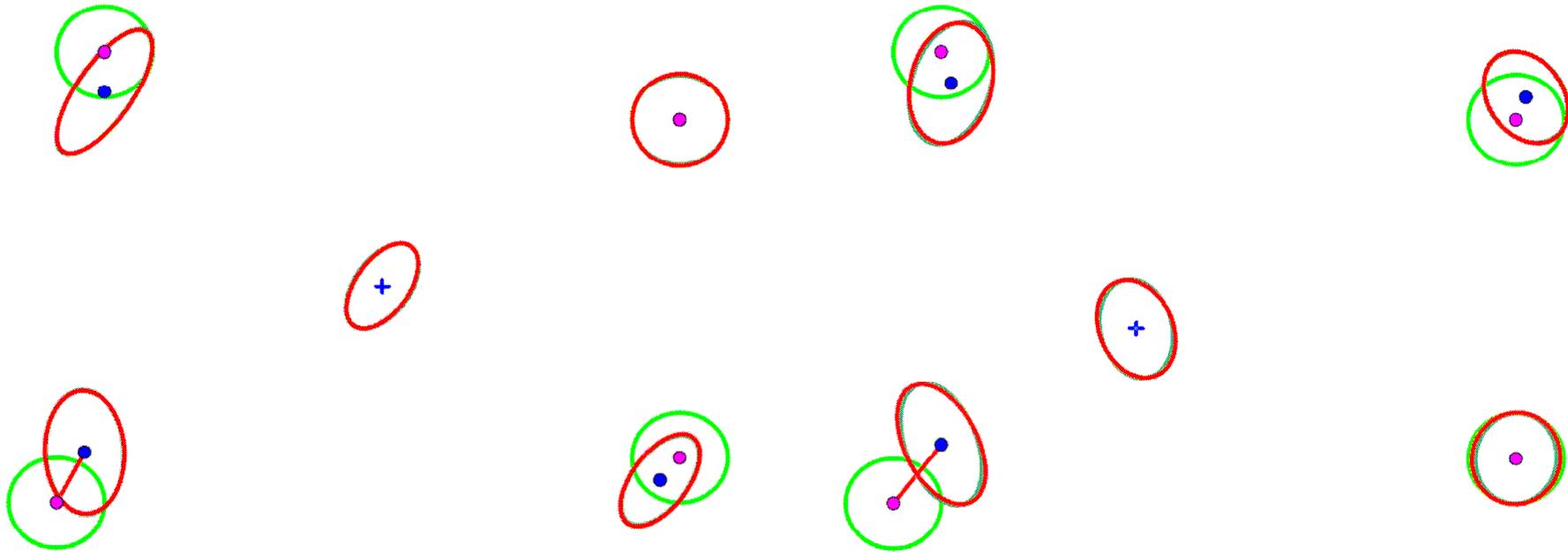
- Größte Unsicherheiten wie große Halbachsen der Streuungsellipsen:

$$u_{\max} = u_{MS} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2} \quad \text{mit } \bar{r} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n r_i$$

- Radiale Abstände  $r_i$  der Bohrungsmitten vom Schwerpunkt
- Unsicherheiten **unabhängig** von der Bohrungsanzahl
- Mit Schwerpunkt aus allen Bohrungen kleinere Unsicherheiten

## Beispiel $L_1$ -Norm

Differenzbetrag  $\Delta x_i = 3 \cdot u(x_i)$  – Unsicherheiten wie aus Simulation



a) Einpassung mit vier Bohrungen

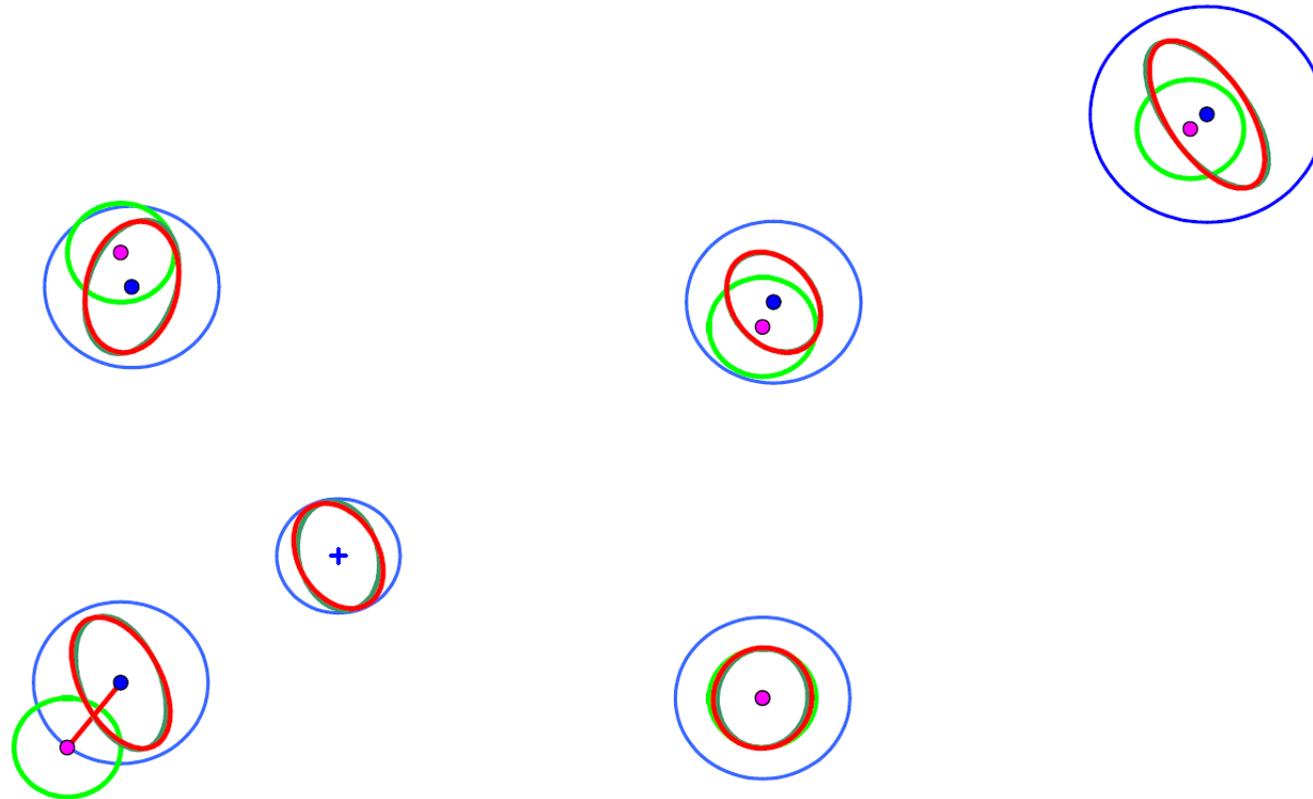
b) Einpassung mit drei Bohrungen

Streubereiche: Bohrungsmittelpunkte, Differenzenmethode, Simulation

# Einpassung nach $L_1$ -Norm

- Einpassung über alle Bohrungen
- Je mehr Bohrungen, desto kleinere Unsicherheiten
- Schwerpunkt und Lochmuster mit ausgeprägten Streuungsellipsen
- Abhängig von Position der Bohrung und Richtung der Abweichung sowie vom radialen Abstand  $r$  der Bohrungsmitte vom Schwerpunkt
- Größte Unsicherheit bei kleinstem Abstand ???

## Beispiel $L_1$ -Norm erweitert



Streubereiche: Bohrungsmittelpunkte,  
Differenzenmethode, Simulation, maximale Unsicherheiten

# Unsicherheit der Einpassung nach L<sub>1</sub>-Norm

## Korrigierte Unsicherheiten

- Mittelpunktkoordinaten der Bohrungen unabhängig und mit gleich großen Standardunsicherheiten ( $u_{Xi}=u_{Yi}=u_{Mi}$ )

- Unsicherheit im Schwerpunkt:

$$u_{MS} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n u_{Mi}^2}$$

- Größte Unsicherheiten wie große Halbachsen der Streuungsellipsen:

$$u_{\max} = u_{MS} \cdot \text{Max} \left( \sqrt{2}; \sqrt{1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2} \right)$$

$$\text{mit } \bar{r} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n r_i$$

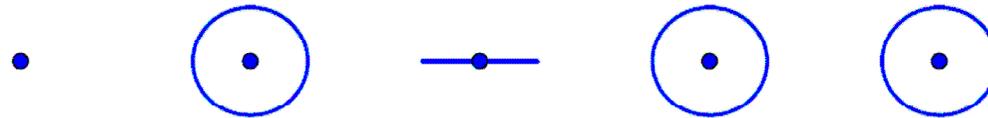
- Faktoren 2,  $\sqrt{2}$  und 1/3 empirisch festgelegt
- Je mehr Bohrungen, desto kleinere Unsicherheiten

# Diskussion

- Einpassung nach Gauß mit den kleinsten Unsicherheiten – je mehr Bohrungen, desto kleiner
- Einpassung nach Tschebyschew mit den kleinsten Abweichungen – entspricht der Funktion
- $L_1$ -Norm mit den größten Abweichungen – nicht empfohlen
- Positionstoleranzen mit Bezugssystem für eindeutige Abweichungen zur Fertigungskorrektur ...
- ... entspricht aber nicht der Funktion bei Bezügen mit Spiel zum Gegenstück
- Passende Teile fälschlich als fehlerhaft bewertet

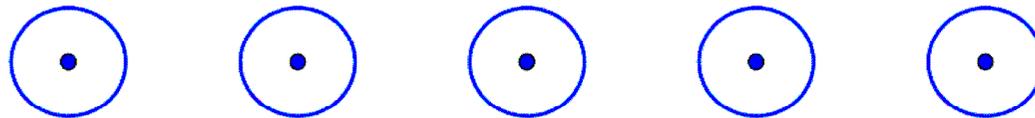
# Bezugssystem, Gauß oder Tschebyschew?

Toleranzfelder für Position im Bezugssystem:



Sieben Koordinaten frei, drei gebunden

Toleranzfelder für kombinierte Positionstoleranz:

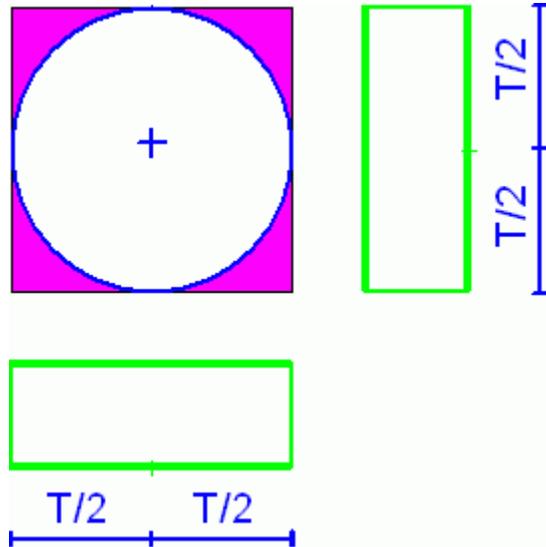


Zehn Koordinaten frei

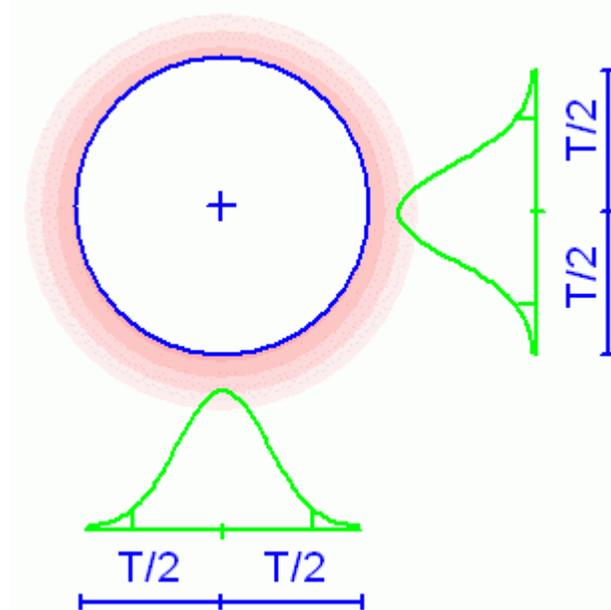
Größere Gesamtfläche der Toleranzfelder – mehr Werkstücke in Toleranz

# Simulation mit Verteilungen der beiden Koordinaten

Für alle freien Koordinaten



Rechteckverteilung mit  $s = \frac{T}{2\sqrt{3}}$



Normalverteilung mit  $s = \frac{T}{6}$

## Anteile der Toleranzüberschreitungen

Überschreitungen bei Position im Bezugssystem: 100 %

Verteilung	Standardabweichung	Anzahl	nach Gauß-Einpassung	nach Tscheb.-Einpassung
Arcsin	$s = \frac{T}{2\sqrt{2}}$	20641	47 %	15 %
Rechteck	$s = \frac{T}{2\sqrt{3}}$	19493	27 %	3 %
Normal	$s = T / 2$	7580	78 %	61 %
	$s = T / 4$	3563	27 %	7 %
	$s = T / 6$	3308	7 %	0,4 %
	$s = T / 8$	963	0,8 %	0 %

Fertigung mit Prozessfähigkeitsindex  $c_P = \frac{T}{6 \cdot s} \geq 1,00$  entspricht  $s = T / 6$

# Auswertung

- Best-Einpassung für kombinierte Toleranz immer weniger Überschreitungen als Position im Bezugssystem
- Verbesserung bei Gauß gegenüber Bezugssystem deutlich größer als bei Tschebyschew gegenüber Gauß
- Bei Forderungen an die Prozessfähigkeit von  $c_p \geq 1,00$  (1,33...1,67) Vorteil von Tschebyschew vernachlässigbar
- Zusätzliche Berücksichtigung der Messunsicherheit mit Entscheidungsregeln nach ISO 14253-1:
  - Bei Gauß kleiner als im Bezugssystem – mehr gute Teile
  - Bei Tschebyschew größer als bei Gauß – mehr Ausschuss

# Zusammenfassung

- Positionstoleranz im Bezugssystem entspricht nicht der Funktion, wenn Spiel in den Bezügen
- Modifizierte Differenzenmethode nach DIN 1319-3 für Unsicherheitsbeiträge und Sensitivitätskoeffizienten auch bei Black-Box-Modellen anwendbar
- Einfache Formeln für die Messunsicherheiten der drei Einpassmethoden
- Gauß-Einpassung mit den kleinsten, Tschebyschew mit den größten Messunsicherheiten
- Bei Gauß deutlich weniger Toleranzüberschreitungen gegenüber dem Bezugssystem als bei Tschebyschew gegenüber Gauß

**Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit**